<공진주파수측정>

담당조교 : 부 지 영
(종합실험동 107호 – jybooh@gmail.com)

1. 실험목적

고유진동수란 각 물체가 가지는 고유한 진동특성을 말하는 것으로, 만일 진동계가 고유 진동수와 동일한 진동수를 가진 외력을 주기적으로 받으면 그 진폭이 무한대로(이론적으로) 증가하게 될 것이다. 이렇게 물체가 갖는 고유 진동수와 외력의 진동수가 일치하게 되어 진폭이 증가하는 현상을 공진현상이라고 하며 좋은 예로 미국의 타코마 다리의 붕괴를 들 수 있다.

타코마 다리의 붕괴와 같은 공진현상은 생활 곳곳에서 일어날 수 있으며 우리가 사용하는 여러 가지 기계들에서도 발생할 수 있다. 기계를 설계할 때 공진을 고려하지 않고 설계한다면 타코마 다리의 붕괴와 같은 일이 일어날 수도 있다. 본 실험에서는 공진현상과 관련하여 물체의 고유진동수 측정과 공진에 의한 진동 모드에 대해서 실험하고자 한다.

2. 실험이론

2.1 진동수란?

진동운동에서 물체가 일정한 왕복운동을 지속적으로 반복하여 보일 때 단위시간당 이러한 반복 운동이 일어난 회수를 진동수라고 한다.

f를 진동수, T를 주기, ω를 각속도라고 하면, f, T, ω 사이의 관계는 다음과 같다.

$$f \qquad : \text{단위}[Hz]$$

$$T = \frac{1}{f} \qquad : \text{단위}[s]$$

$$\omega = 2\pi f \qquad : \text{단위}[rad/s]$$

2.2 고유진동수란?

어떤 물체가 가진 그 물체만의 고유한 진동수를 말한다. 물체를 포함한 시스템의 진동을 이야기 할 때 는 질량, 스프링, 댐퍼 를 이용하여 고유진동수를 구할 수 있다. 하나의 질량과 하나의 스프링을 가진 1자유도 진동 시스템의 경우 다음 식을 이용하여 이론적인 고유진동수를 구할 수 있다.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

만약 시스템이 n자유도를 갖는다면 n개의 고유진동수를 갖는다고 볼 수 있다.

하지만 질량, 스프링, 댐퍼로 이루어진 진동 시스템이 아닌 경우, 예를 들어 외팔보와 같은 물체 자체가 질량이며 강성을 갖는 스프링인 경우를 연속체라고 하며 연속체는 다양한 형태로 변형이 가능하며 자유도는 무한하다고 볼 수 있다. 이러한 연속체의 경우 고유진동수 또한 무한개가 존재한다.

2.3 진동모드

2.2에서 설명한 연속체의 고유진동수의 개수는 무한하다. 무한한 각각의 고유진동수에 해당하는 연속체의 진동모드가 존재하는데 이를 그 물체의 진동모드라고 한다. 외팔보의 경우 다음과 같은 진동모드가 존재한다.

단면적이 A(일정)인 균질한 외팔보의 굽힘진동(또는 횡진동)에 있어서 보의 길이 방향으로 x축을, 굽힘에 의한 변위 방향으로 y축을 취한다. 이 경우 고정단에서 임의의 거리 x점의 변위 y는 x이외 시간 t의 함수로 되므로 $y(x,t)$로 표시한다. 진동방향에 직각인 중립축 z에 관한 단면 A의 2차모멘트 또는 관성모멘트를 I, 재료의 종탄성계수를 E, 보의 단위체적당의 질량 즉, 밀도를 ρ로 표시할 때 보의 운동방정식은 Newton의 제 2법칙을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$a^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0 \qquad (1)$$

여기서,

$$a^2=\frac{EI}{\rho A}\,(cm^4/s^2) \qquad (2)$$

이다. 지금 변위 y가 시간 t에 대해서 단순조화운동을 한다면 식 (1)의 해는

$$y(x,t)=Y(x)(B_1\sin\omega t+B_2\cos\omega t) \qquad (3)$$

로 가정할 수 있다 여기서 Y(x)는 보의 진동 형태를 결정하는 x만의 함수이고 이것을 고유함수라 한다. 식 (3)을 식 (1)에 대입하면

$$a^2\left(\frac{d^4Y}{dx^4}-\frac{\omega^2}{a^2}Y\right)(B_1\sin\omega t+B_2\cos\omega t)=0 \qquad (4)$$

을 얻는다. 식 (4)에서

$$\frac{\omega^2}{a^2} = \lambda^4 = \frac{\rho A}{EI}\omega^2 \tag{5}$$

로 놓으면 식 (4)의 제 2항은

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} - \lambda^4 Y = 0 \tag{6}$$

로 된다.
식 (6)의 미분방정식의 해를 구하면 다음과 같다.

$$Y = c_1 \cos\lambda x + c_2 \sin\lambda x + c_3 \cosh\lambda x + c_4 \sinh\lambda x \tag{7}$$

여기서, 적분상수 c_1, c_2, c_3 및 c_4는 경계조건에 의해서 결정된다.
외팔보의 경계조건은 일단 고정단, 자유단의 2개이다. 즉, 고정단 x=0에서는 보의 변위와 기울기가 0이므로 이 조건을 식으로 표시하면

$$Y = 0, \quad \frac{dY}{dx} = 0 \tag{8}$$

이고, 자유단 X=L 에서는 굽힘모멘트와 전단력이 0이므로

$$-EI\frac{d^2 Y}{dx^2} = 0, \quad -EI\frac{d^3 Y}{dx^3} = 0 \tag{9}$$

식 (7)에 경계조건 식 (8), (9) 을 대입하면 다음 식이 구해진다.

$$\begin{aligned}
&Y_{(x=0)} = c_1 + c_3 = 0 \\
&\frac{dY}{dx}_{(x=0)} = c_2 + c_4 = 0 \\
&\frac{d^2 Y}{dx^2}_{(x=L)} = -c_1 \cos\lambda L - c_2 \sin\lambda L + c_3 \cosh\lambda L + c_4 \sinh\lambda L = 0 \\
&\frac{d^3 Y}{dx^3}_{(x=L)} = c_1 \sin\lambda L - c_2 \cos\lambda L + c_3 \sinh\lambda L + c_4 \cosh\lambda L = 0
\end{aligned} \tag{10}$$

식 (10)에서 c_3과 c_4를 소거하면 다음 식이 구해진다.

$$c_1(-\cos\lambda L-\cosh\lambda L)+c_2(-\sin\lambda L-\sinh\lambda L)=0$$
$$c_1(\sin\lambda L-\sinh\lambda L)+c_2(-\cos\lambda L-\cosh\lambda L)=0 \tag{11}$$

식 (11)에서

$$\frac{c1}{c2}=\frac{\sin\lambda L+\sinh\lambda L}{-\cos\lambda L-\cosh\lambda L}=\frac{\cos\lambda L+\cosh\lambda L}{\sin\lambda L-\sinh\lambda L} \tag{12}$$

따라서,

$$-(\cos\lambda L+\cosh\lambda L)^2=\sin^2\lambda L-\cos^2\lambda L \tag{13}$$

즉,

$$-2\cos\lambda L\cosh\lambda L=(\sin^2\lambda L+\cos^2\lambda L)+(\cosh^2\lambda L-\sinh^2\lambda L)=1+1 \tag{14}$$

에서

$$1+\cos\lambda L\cosh\lambda L=0 \tag{15}$$

인 관계식이 얻어진다. 식(15)를 변형해서 다음 식을 얻는다.

$$\cos\lambda L=-\frac{1}{\cosh\lambda L} \tag{16}$$

또한, 식(16)을 Matrix를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다. 식(10)을 Matrix Form으로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \\ c4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} = 0 \tag{18}$$

$$\begin{aligned} &A_{11} = 1 \ \ A_{21} = 0 \ \ A_{31} = -\lambda^2 \cos\lambda L \ \ A_{41} = \lambda^3 \sin\lambda L \\ &A_{12} = 0 \ \ A_{22} = 1 \ \ A_{32} = -\lambda^2 \sin\lambda L \ \ A_{42} = -\lambda^3 \cos\lambda L \\ &A_{11} = 1 \ \ A_{23} = 0 \ \ A_{33} = \lambda^2 \cosh\lambda L \ \ A_{43} = \lambda^3 \sinh\lambda L \\ &A_{14} = 0 \ \ A_{24} = 1 \ \ A_{34} = \lambda^2 \sinh\lambda L \ \ A_{44} = \lambda^3 \cosh\lambda L \end{aligned} \tag{19}$$

Det[A]=0에서 근을 구하고, 그 근을 이용해서 보의 고유진동수를 구한다.

$$\begin{aligned} |A| = &A_{14}A_{23}A_{32}A_{41} - A_{13}A_{24}A_{32}A_{41} - A_{14}A_{22}A_{33}A_{41} + A_{12}A_{24}A_{33}A_{41} \\ &+ A_{13}A_{22}A_{34}A_{41} - A_{12}A_{23}A_{34}A_{41} - A_{14}A_{23}A_{31}A_{42} + A_{13}A_{24}A_{31}A_{42} \\ &+ A_{14}A_{21}A_{33}A_{42} - A_{11}A_{24}A_{33}A_{42} - A_{13}A_{21}A_{34}A_{42} + A_{11}A_{23}A_{34}A_{42} \\ &+ A_{14}A_{22}A_{31}A_{43} - A_{12}A_{24}A_{31}A_{43} - A_{14}A_{21}A_{32}A_{43} + A_{11}A_{24}A_{32}A_{43} \\ &+ A_{12}A_{21}A_{34}A_{43} - A_{11}A_{22}A_{34}A_{43} - A_{13}A_{22}A_{31}A_{44} + A_{12}A_{23}A_{31}A_{44} \\ &+ A_{13}A_{21}A_{32}A_{44} - A_{11}A_{23}A_{32}A_{44} - A_{12}A_{21}A_{33}A_{44} + A_{11}A_{22}A_{33}A_{44} = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

식(20)에 식 (19)를 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\lambda^5\cos^2\lambda L + 2\lambda^5\cos\lambda L cosh\lambda L + \lambda^5\cosh^2\lambda L + \lambda^5\sin^2\lambda L - \lambda^5\sinh^2\lambda L = 0$$
$$2\cos\lambda L cosh\lambda L + \underline{\cos^2\lambda L + \sin^2\lambda L}(=1) + \underline{\cosh^2\lambda L - \sinh^2\lambda L}(=1) = 0$$
$$2\cos\lambda L cosh\lambda L = -2$$

을 정리하면 식(16)이 얻어진다.

$$y_1 = \cos\lambda L \tag{21}$$

$$y_1 = -\frac{1}{\cos\lambda L} \tag{22}$$

식 (16)을 다시 쓰면 식 (23)이 되고 식 (23)을 이용하여 각 모드에 대한 λ값을 구하면 식 (24)과 같다.

$$1 + \cos\lambda L cosh\lambda L = 0 \tag{23}$$

$$\lambda_1 L = 1.875$$

$$\lambda_2 L = 4.694$$

$$\lambda_3 L = 7.875 \tag{24}$$

그러므로, 식 (5)에서 각 진동 모드에 대한 보의 고유진동수는 다음과 같다.

$$f_1 = \frac{(1.875)^2}{2\pi L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{25}$$

$$f_2 = \frac{(4.684)^2}{2\pi L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{26}$$

$$f_3 = \frac{(7.855)^2}{2\pi L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{27}$$

2.3.1 진동 모드 형상

Figure 1. 1차 진동모드

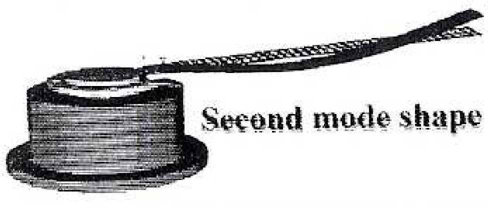

Figure 2. 2차 진동모드

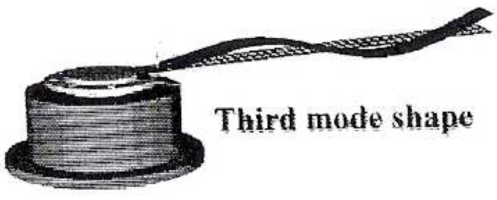

Figure 3. 3차 진동모드

3. 실험장치

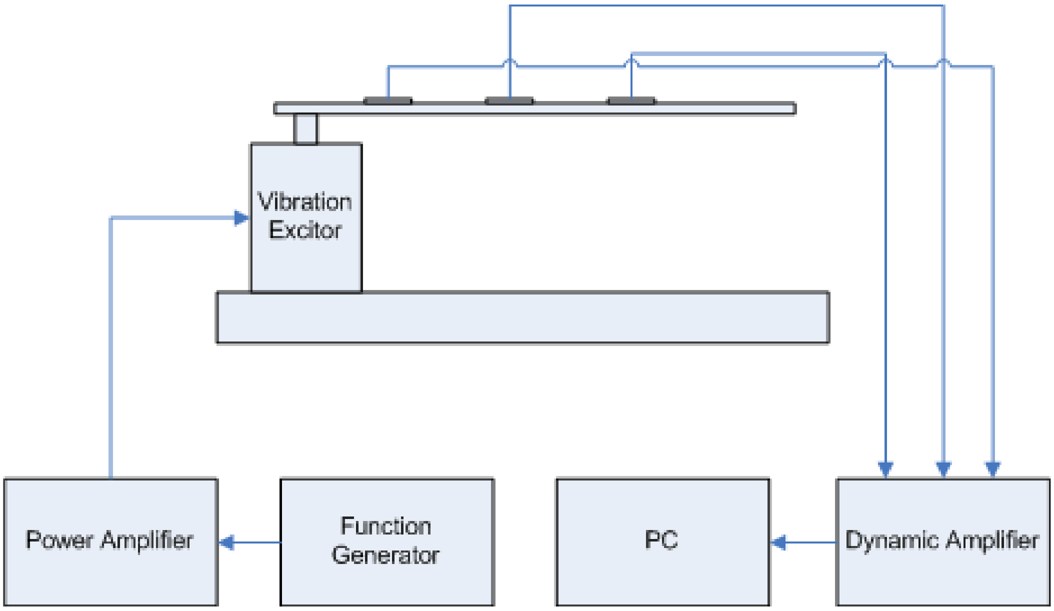

Figure 4. 실험장치 구성도

[1. 조사하시오.]

1. Vibration Excitor
2. Power Amplifier
3. Function Generator
4. Dynamic Amplifier
5. Strain gage

4. 실험방법

① Strain gage를 부착 방법에 따라 측정하고자 하는 외팔보에 접착제를 이용해 부착한다.

② 부착한 Strain gage를 Dynamic Amp.에 연결 할 수 있게 커넥터를 제작하고 Amp.에 연결한다.

③ PC에 설치되어있는 Strain Smart 프로그램을 실행하고 연결된 Strain gage를 인식시키고 Strain gage의 물리량을 입력한다.

④ 가진기(Vibration exciter)의 진동대(table)에 외팔보를 부착하고, 가진기의 진동수를 신호발생기(sine generator)로 증가시키면서 진폭을 증폭기(power amplifier)와 PC의 Strain monitoring 프로그램을 이용하여 진폭을 일정하게 유지시키면 진동수는 가진기의 진동수와 같게 된다.

⑤ 진동수를 증가시키다가 진폭이 급격히 증가하는 공진점을 찾고 그 형상을 기록한다.

⑥ 이상의 실험을 1차, 2차, 3차 공진에 대해서 행하고 최대 진폭에 대응하는 공진진동수의 정확한 값을 구하여 외팔보의 고유진동수로 본다.
⑦ 실험으로 얻어진 각 차수의 진동수와 이론식으로 구한 각 차수의 진동수를 비교한다.

5. 실험결과

[1. 실험에 필요한 물성치]

E (탄성계수)	:	$E = 215\,GPa$
ρ (밀도)	:	$\rho = 7690\,kg/m^3$

[2. 다음은 직접 구하시오.]

$b[m]$(너비)	:
$h[m]$(높이)	:
$L[m]$(길이)	:
$I[m^4]$(2차모멘트)	:
$A[m^2]$(단면적)	:

[3. 표와 그래프를 반드시 넣을 것.]

6. 결론 및 고찰

7. 참고문헌

※ 레포트 제출 시 유의사항

e-mail 제출 시 :

파일명) 실험2_공진주파수_A반1조_32122000_홍길동

jybooh@gmail.com으로 제출

paper 제출 : 종합실험동 107호